Les couples de variables aléatoires discrètes

M3 – Chapitre 3

On a $\quad X(\Omega)=\{x_i, i\in I\} \quad Y(\Omega)=\{x_j, j\in J\} \qquad i\in I \qquad j\in J$

I. Définitions

1. Loi conjointe de (X,Y)

$$\forall\,(i,j) \qquad \boxed{P\Big((X,Y)=(x_i,y_j)\Big)=P\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)}$$

2. Lois marginales

$$P(X=x_i)=\sum_j P\Big((X,Y)=(x_i,y_j)\Big) \qquad\qquad P(Y=y_j)=\sum_i P\Big((X,Y)=(x_i,y_j)\Big)$$

3. Indépendance

$$(X,Y)\text{ indépendantes} \Leftrightarrow P\Big((X,Y)=(x_i,y_j)\Big)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

II. Loi d'une fonction de variables aléatoires

1. Loi de $Z=X+Y$

$$(X+Y=z)=\bigcup_i (X=x_i)\cap(Y=z-x_i) \Rightarrow \boxed{P(X+Y=z)=\sum_i P(X=x_i)\,P_{(X=x_i)}(Y=z-x_i)}$$

2. Cas particuliers

$$\left.\begin{array}{r} X\hookrightarrow\mathcal{B}(n_1,p) \\ Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n_2,p) \\ X,Y\text{ indep} \end{array}\right\} \Rightarrow\ Z\hookrightarrow\mathcal{B}(n_1+n_2,p) \qquad\qquad \left.\begin{array}{r} X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_1) \\ Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_2) \\ X,Y\text{ indep} \end{array}\right\} \Rightarrow\ Z\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

III. Espérance de $f(X,Y)$

1. Définition

$$\boxed{E\big(f(X,Y)\big)=\sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,P\Big((X,Y)=(x_i,y_j)\Big)}$$

2. Propriétés

- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- X,Y indep $\Rightarrow\ E(XY)=E(X)E(Y)$

IV. Covariance

1. Définition

$$\boxed{cov(X,Y)=E\Big(\big(X-E(X)\big),\big(Y-E(Y)\big)\Big)}$$

2. Propriétés

- $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- $cov(X,X)=V(X)$
- $cov(X,Y)=cov(Y,X)$
- $cov(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y)=\lambda_1\,cov(X_1,Y)+\lambda_2\,cov(X_2,Y)$

V. Variance

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,cov(X,Y)}$$

$$V\Big(\sum X_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)+2\sum_{\substack{i,j\\1\leq i<j}}cov(X_i,X_j)$$

VI. Coefficient de corrélation linéaire

1. Définition

$$\boxed{\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}}$$

2. Propriétés

- $|\rho_{X,Y}|\leq 1$
- $|\rho_{X,Y}|=1\Leftrightarrow X$ presque sûrement expression linéaire de Y
- $|\rho_{X,Y}|=0\Leftrightarrow X,Y$ non corrélés